BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2007

İNFORMATİKA

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИСКРЕТНОГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА ПО ВЫХОДУ

Ф.А.АЛИЕВ, Н.А.САФАРОВА
Институт Прикладной Математики БГУ

В настоящей работе приводятся новые аналитические формулы (аналогично методу Levine-Athans для стационарного случая) определения матриц цепи обратной связи для решения задач дискретной периодической оптимальной системы стабилизации по выходу, с помощью которых возможно уточнение коэффициентов соответствующего регулятора. Результаты иллюстрируются конкретным примером.

Линейно-квадратичная задача оптимального управления по всем фазовым координатам на бесконечном интервале времени были исследованы достаточно хорошо [2,3,8]. Однако, аналогичная задача по части фазовых координат все еще требует от исследователей проведения более тонких разработок. Действительно, в работах [10,11] приведены общие формулы для непрерывного и дискретного случаев, в которых коэффициенты оптимального регулятора удовлетворяют этим соотношениям. Далее, в работе [11] в непрерывном случае на основе этих соотношений предлагается итеративный алгоритм, требующий выбора соответствующих начальных приближений, который также проблематичен [1,12]. Однако, в работах [1,10] найдены хорошие начальные приближения, которые могут быть удачно использованы для итерационного метода [11] .

Аналогичные формулы, удовлетворяющие коэффициентам оптимального регулятора для дискретных периодических систем управлений по выходу, отсутствуют [11]. Получение таких соотношений даст возможность построения аналогичной итеративной схемы для периодического случая. В работах [5,7,9] были предложены алгоритмы для решения дискретной периодической задачи по выходной переменной, результаты которых могут быть необходимыми начальными приближениями. В настоящей работе приведены новые аналитические соотношения для определения коэффициентов оптимального дискретного периодического регулятора. Проверка в этих соотношениях результатов примеров из [10] показывает, что они удовлетворяются с точностью 10^{-6} .

Пусть движение объекта описывается системой конечно - разностных уравнений

$$x(i+1) = \Psi(i)x(i) + \Gamma(i)u(i),\ x(0) = x_0, \quad i = 0,1,2,... \tag{1}$$

с наблюдением

$$y(i) = C(i)x(i) \qquad (2)$$

и требуется найти такой регулятор цепи обратной связи

$$u(i) = K(i)y(i), \qquad (3)$$

который минимизировал бы функционал

$$J = E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(x'(i)Q(i)x(i) + u'(i)R(i)u(i)\right)\right), \qquad (4)$$

где $x(i)$ - n - мерный вектор фазовых координат объекта, $y(i) - r$ - мерный наблюдаемый вектор, $u(i) - m$ - мерный вектор управляющих воздействий, $\Psi(i), \Gamma(i), C(i), Q(i), R(i)$ – периодические матрицы с периодом p, т.е., $\Psi(i+p) = \Psi(i)$, $\Gamma(i+p) = \Gamma(i)$, $Q(i+p) = Q(i) = Q'(i) \geq 0$, $R(i+p) = R(i) = R'(i) > 0$, x_0 - случайная величина со значением $E\{x_0\} = 0$ и ковариационной матрицей $E\{x_0 x_0'\} = P$, E - обозначение математического ожидания, штрих здесь и далее означает операцию транспонирования.

Подставляя (3) в (1) имеем:

$$x(i+1) = \left(\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i)\right)x(i), \quad x(0) = x_0,\ i = 0,1,\ldots, \qquad (5)$$

где $x(i)$ дается по

$$x(i) = \Psi(0,p)x_0, \qquad (6)$$

$$\Psi(0,p) = \Psi(p-1)\Psi(p-2)\ldots\Psi(0).$$

Подставляя (6) и (3) в функционал (4) получим

$$J = Sp\left\{P\left(\sum_{i=0}^{\infty}\left(\Psi^{i'}(0,p)Q(0,p)\Psi^{i}(0,p)\right)\right)\right\}. \qquad (7)$$

В (7) и далее Sp – означает след матрицы.

Для определения оптимальной матрицы цепи обратной связи $K(i)$из (3) используем результаты [12]. Для этого как в [12], вычислим градиент функционала (4). Как известно, значение функционала (7) по траектории (5) вычисляется в виде

$$J(\alpha) = Sp(PS(0)), \qquad (8)$$

где матрицы $S(0), S(1), \ldots, S(p-1)$ - решение следующего матричного дискретного периодического нелинейного уравнения

$$\begin{aligned} S(i) &= (\Psi(i) + \Gamma(i)K(i))C(i)S'(i+1)(\Psi(i) + \Gamma(i)K(i)C(i)) + \\ &+ Q(i) + C'(i)K'(i)R(i)K(i)C(i). \end{aligned} \qquad (9)$$

Для того, чтобы вычислить np– размерный градиент $\dfrac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_i}$ используем соотношения (8) и дискретного алгебраического уравнения Ляпунова

$$S(0) = \Psi'(0,p)S(p)\Psi(0,p) + Q(0,p), \qquad (10)$$

где

$$\Psi(0,p)=\tilde{\Psi}(p-1)\tilde{\Psi}(0,p-1),$$

$$\tilde{\Psi}(p-1)=\Psi(p-1)+\Gamma(p-1)K(p-1)C(p-1),\quad \Psi(0,0)=E,$$

$$Q(0,p)=\tilde{Q}(0,p-1)+\tilde{\Psi}'(0,p-1)\tilde{Q}(p-1)\tilde{\Psi}(0,p-1),$$

$$\tilde{Q}(p-1)=Q(p-1)+C'(p-1)K'(p-1)R(p-1)K(p-1)C(p-1),\qquad Q(0,0)=0\ .$$

Используем результаты вычисления градиента [4] функционала (7) (или (8)) относительно параметра α, который зависит от матрицы цепи обратной связи

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha_i}=Sp\left[P\frac{\partial S(0)}{\partial\alpha_i}\right]. \tag{11}$$

Поскольку минимальное значение функционала (7) зависит от $S(0)$, приведем вычисление ее частных производных по α_i

$$
\begin{aligned}
&Sp\left(\frac{\partial S(0)}{\partial\alpha_i}\right)=Sp\left(\tilde{\Psi}'(0)\tilde{\Psi}'(1)\cdots\tilde{\Psi}'(p-1)\frac{\partial Sp(S(0))}{\partial\alpha_i}\tilde{\Psi}(p-1)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)+C'(0)T(0)+T'(0)C(0)\right),\\
&T(0)=\frac{\partial Sp(K'(0))}{\partial\alpha_i}\Big[\Gamma'(0)\tilde{\Psi}'(1)\cdots\tilde{\Psi}'(p-1)S(0)\tilde{\Psi}(p-1)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)+R(0)K(0)C(0)+\Gamma'(0)\tilde{Q}(1)\tilde{\Psi}(0)+\\
&+\Gamma'(0)\tilde{\Psi}'(1)\tilde{Q}(2)\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)+\ldots+\Gamma'(0)\tilde{\Psi}'(1)\cdots\tilde{\Psi}'(p-2)\tilde{Q}(p-1)\tilde{\Psi}(p-2)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)\Big],\\
&\\
&Sp\left(\frac{\partial S(0)}{\partial\alpha_i}\right)=Sp\left(\tilde{\Psi}'(0)\tilde{\Psi}'(1)\cdots\tilde{\Psi}'(p-1)\frac{\partial Sp(S(0))}{\partial\alpha_i}\tilde{\Psi}(p-1)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)+\tilde{\Psi}'(0)C'(1)T(1)+T'(1)C(1)\tilde{\Psi}(0)\right),\\
&T(1)=\frac{\partial Sp(K'(1))}{\partial\alpha_i}\Big[\Gamma'(1)\cdots\tilde{\Psi}'(p-1)S(0)\tilde{\Psi}(p-1)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)+R(1)K(1)C(1)\tilde{\Psi}(0)+ \qquad\qquad \mathbf{(12)}\\
&\Gamma'(1)\tilde{Q}(2)\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)+\ldots+\Gamma'(1)\cdots\tilde{\Psi}'(p-2)\tilde{Q}(p-1)\tilde{\Psi}(p-2)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)\Big],\\
&\ldots\\
&Sp\left(\frac{\partial S(0)}{\partial\alpha_i}\right)=Sp\left(\tilde{\Psi}'(0)\tilde{\Psi}'(1)\cdots\tilde{\Psi}'(p-1)\frac{\partial Sp(S(0))}{\partial\alpha_i}\tilde{\Psi}(p-1)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)+\right.\\
&\left.+\tilde{\Psi}'(0)\tilde{\Psi}'(1)\cdots\tilde{\Psi}'(p-2)C'(p-1)T(p-1)+T'(p-1)C(p-1)\tilde{\Psi}(p-2)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)\right),\\
&T(p-1)=\frac{\partial Sp(K'(p-1))}{\partial\alpha_i}\Big[\Gamma'(p-1)S(0)\tilde{\Psi}(p-1)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)+\\
&+R(p-1)K(p-1)C(p-1)\tilde{\Psi}(p-2)\cdots\tilde{\Psi}(1)\tilde{\Psi}(0)\Big].
\end{aligned}
$$

Используя следующие факты из [12]

$$Sp[AB]=Sp[BA],\ Sp[AB]=Sp[AB'] \tag{13}$$

и применяя результаты из [8] к (12), получим

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha_i}=Sp\left\{\left(\sum_{i=0}^{\infty}\Psi^i(i,p)P\Psi^{i'}(i,p)\right)(C'(i)T(i)+T'(i)C(i))\right\}, \tag{14}$$

где $i=\overline{0,p-1}$,

$$T(0)=\left[\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-1)S(0)\widetilde{\Psi}(p-1)\cdots\widetilde{\Psi}(1)\Gamma(0)+C'(0)K'(0)R(0)+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{Q}(1)\Gamma(0)+\right.$$
$$\left.+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\widetilde{Q}(2)\widetilde{\Psi}(1)\Gamma(0)+\ldots+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-2)\widetilde{Q}(p-1)\widetilde{\Psi}(p-2)\cdots\widetilde{\Psi}(1)\Gamma(0)\right]\frac{\partial Sp(K(0))}{\partial\alpha_i},$$
$$T(1)=\left[\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-1)S(0)\widetilde{\Psi}(p-1)\cdots\Gamma(1)+\widetilde{\Psi}'(0)C'(1)K'(1)R(1)+\right.$$
$$\left.+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\widetilde{Q}(2)\Gamma(1)+\ldots+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-2)\widetilde{Q}(p-1)\widetilde{\Psi}(p-2)\cdots\Gamma(1)\right]\frac{\partial Sp(K(1))}{\partial\alpha_i},$$
$$\ldots$$
$$T(p-1)=\left[\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\ldots\widetilde{\Psi}'(p-1)S(0)\Gamma(p-1)+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-2)\times\right.$$
$$\left.\times C'(p-1)K'(p-1)R(p-1)\right]\frac{\partial Sp(K(p-1))}{\partial\alpha_i}.$$

Учитывая (13) и применяя результаты из [8] к (14) получим следующее

$$\frac{\partial J(\alpha)}{\alpha_i}=2Sp\{U(0)T(0)C(0)\}=2Sp\{C(0)U(0)T(0)\}=$$
$$=2Sp\left\{C(0)U(0)\left(\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-1)S(0)\widetilde{\Psi}(p-1)\cdots\widetilde{\Psi}(1)\Gamma(0)+C'(0)K'(0)R(0)+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{Q}(1)\Gamma(0)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\widetilde{Q}(2)\widetilde{\Psi}(1)\Gamma(0)+\ldots+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-2)\widetilde{Q}(p-1)\widetilde{\Psi}(p-2)\cdots\widetilde{\Psi}(1)\Gamma(0)\right)\frac{\partial Sp(K(0))}{\partial\alpha_i}\right\},$$
$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha_i}=2Sp\{U(0)T(1)C(1)\Psi(0)\}=2Sp\{C(1)\Psi(0)U(0)T(1)\}=$$
$$=2Sp\left\{C(1)\Psi(0)U(0)\left(\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-1)S(0)\widetilde{\Psi}(p-1)\cdots\Gamma(1)+\widetilde{\Psi}'(0)C'(1)K'(1)R(1)+\right.\right. \quad (15)$$
$$\left.\left.+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\widetilde{Q}(2)\Gamma(1)+\ldots+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-2)\widetilde{Q}(p-1)\widetilde{\Psi}(p-2)\cdots\Gamma(1)\right)\frac{\partial Sp(K(1))}{\partial\alpha_i}\right\},$$
$$\ldots$$
$$\frac{\partial J(\alpha)}{\partial\alpha_i}=2Sp\{U(0)T(p-1)C(p-1)\Psi(p-2)\ldots\Psi(0)\}=2Sp\{C(p-1)\Psi(p-2)\ldots\Psi(0)U(0)T(p-1)\}=$$
$$=2Sp\left\{C(p-1)\Psi(p-2)\ldots\Psi(0)U(0)\left(\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\ldots\widetilde{\Psi}'(p-1)S(0)\Gamma(p-1)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\widetilde{\Psi}'(0)\widetilde{\Psi}'(1)\cdots\widetilde{\Psi}'(p-2)C'(p-1)K'(p-1)R(p-1)\right]\frac{\partial Sp(K(p-1))}{\partial\alpha_i}\right\},$$

где $U(0)$ - решение соответствующего дискретного сопряженного уравнения Ляпунова

$$U(0)=\Psi(0,p)U(0)\Psi'(0,p)+P,$$

при которых

$U(i+1)=(\Psi(i)+\Gamma(i)K(i)C(i))U(i)(\Psi(i)+\Gamma(i)K(i)C(i))'+P(i)$, где $i=\overline{0,p-2}$,

$U(p)=(\Psi(p-1)+\Gamma(p-1)K(p-1)C(p-1))U(p-1)(\Psi(p-1)+\Gamma(p-1)K(p-1)C(p-1))'+P.$

После несложных преобразований из (15) получаем следующие формулы для определения градиента функционала

$$L(i)=2(R(i)K(i)C(i)+\Gamma'(i)S(i+1)(\Psi(i)+\Gamma(i)K(i)C(i)))U(i)C'(i),\ i=\overline{0,p-1}. \quad (16)$$

Из (16) найдем матрицы цепи обратной связи

$$K(i)=-(R(i)+\Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i))^{-1}\Gamma'(i)S(i+1)\Psi(i)U(i)C'(i)[C(i)U(i)C'(i)]^{-1},\ i=\overline{0,p-1}. \quad (17)$$

Таким образом, для определения матриц $K(i)$, $i=\overline{0,p-1}$ имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&S(i)=\left(\Psi(i)+\Gamma(i)K(i)C(i)\right)' S(i+1)(\Psi(i)+\Gamma(i)K(i)C(i))+\\
&\quad +Q(i)+C'(i)K'(i)R(i)K(i)C(i),\\
&K(i)=-(R(i)+\Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i))^{-1}\Gamma'(i)S(i+1)\Psi(i)U(i)C'(i)[C(i)U(i)C'(i)]^{-1},\\
&i=\overline{0,p-1}, \qquad (18)\\
&U(i+1)=(\Psi(i)+\Gamma(i)K(i)C(i))U(i)(\Psi(i)+\Gamma(i)K(i)C(i))'+P(i),\\
&i=\overline{0,p-2},\ P(i)=0,\quad i=p-1,\ P(i)=P,
\end{aligned}$$

которые являются периодическим аналогом соотношения [10-12] для задачи периодической оптимизации.

Пример. Проверим правильности формул (18) на примере из [10]. Параметры $\Psi(i), \Gamma(i), C(i), Q(i), R(i), W(i)$ имеют вид:

$$\Psi(i)=\begin{bmatrix}1{,}0201 & 0{,}2013\\ 0{,}2013 & 1{,}0201\end{bmatrix},\quad \Gamma(i)=\begin{bmatrix}0{,}0201\\ 0{,}2013\end{bmatrix},\ C(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix},\ C(1)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix},$$

$$Q(i)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ R(i)=0, K(0)=-6.9521,\ K(1)=-3.8123,\ i=\overline{0,p-1},\ p=2.$$

Поставляя эти $K(0), K(1)$ в формулах (18) получали периодические решения алгебраического уравнения Ляпунова

$$S(0)=\begin{bmatrix}7.1103 & 0.7359\\ 0.7359 & 3.3082\end{bmatrix},\quad S(1)=\begin{bmatrix}8.8349 & 1.2817\\ 1.2817 & 1.3681\end{bmatrix},$$

$$U(0)=\begin{bmatrix}2.4097 & -0.1368\\ -0.1368 & 1.1503\end{bmatrix},\ U(1)=\begin{bmatrix}1.8666 & -2.3964\\ -2.3964 & 4.9919\end{bmatrix}.$$

Пусть $N(i)=K(i)+(R(i)+\Gamma'(i)S(i+1)\Gamma(i))^{-1}\Gamma'(i)S(i+1)\Psi'(i)U(i)C'(i)[C(i)U(i)C'(i)]^{-1}$. (19)

Тогда (19) удовлетворяется со следующей точностью

$\|N(0)\|=8.4345\text{e-}006,\quad \|N(1)\|=\ 1.2855\text{e-}006.$

Таким образом, полученные формулы могут быть использованы для дальнейших уточнений $K(i)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алиев Ф.А., Марданов М.Дж., Велиева Н.И. Алгоритм для решения задачи синтеза оптимальной системы стабилизации по выходной переменной. Элек. Модел., 1995, том 17, № 6, с.47-51.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными и линейными объектами. М.: Наука, 1976, 424 с.
3. Брайсон А., Хо-ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972, 544 с.
4. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. Пер. с англ. М.: Мир, 1977, 656 с.
5. Ларин В.Б. О Стабилизации периодической системы статической обратной связью по выходной переменной // Прикладная механика, том 42, №3, с. 127-134.

6. Aliev F.A., Archasoy C.C., Asadzadeh M. and et.all. Computational Algorithms for Optimization Problems for Periodic Systems. Chalmers University of Technology and Göteborg University, Göteborg, Sweden, 2006, 25p.
7. Aliev F.A., Arcasoy C.C., Larin V.B., Safarova N.A. Synthesis problem for periodic system by static output feedback. An Int. Journal ACM, 4(2005)N2, 102-113.
8. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of Linear Control System. Gordon and Breach publ., London, 1998, 280p.
9. Aliev F. A., Safarova N.A. Optimization problem for the discrete periodic systems with respect to output. // Reports of Azerbaijan National Academy of Sciences, 2005, T LVIII, №1-2, p.102-113.
10. Larin V.B. Stabilization of the system by static output feedback. An Int. Journal ACM, 2003, Vol.2, No.1, p. 47-51.
11. Levine W.S., Athans M. On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for linear Multivariable Systems // IEEE Transactions on Automatic Control, 1970, Vol. AC-15, No.1, p.44-48.
12. Milani E.A. On the Computation of the optimal constant output feedback gains for large-scale linear time-invariant systems subjected to control structure constrains, in hecture Notes in Control and Information Sciences 23, Optimization Techniques, New York: Springer, 1980, p.332-341.

ÇIXIŞA GÖRƏ DİSKRET PERİODİK OPTİMAL TƏNZİMLƏYİCİNİN MATRİS ƏMSALLARININ TƏYİNİ ÜÇÜN MÜNASİBƏTLƏR

F.Ə.ƏLİYEV, N.Ə.SƏFƏROVA

XÜLASƏ

İşdə çıxışa görə diskret periodik optimal stabilləşdirmə sistemləri üçün tərs əlaqə matrisinin təyini düsturu (stasionar hal üçün Levine-Athans metoduna analoji olaraq) verilir. Bu düstur tərs əlaqə matrisini daha dəqiqliklə hesablamağa imkan verir. Bu düsturun dəqiqliyi konkret misalla yoxlanılır.

THE CORRELATIONS FOR DEFINING OF THE MATRIX COEFFICIENTS OF THE DISCRETE PERIODIC OPTIMAL REGULATOR TO OUTPUT

F.A.ALIEV, N.A.SAFAROVA

SUMMARY

In present paper the new formulas (analogously to Levine-Athans method for the stationary case) defining the feedback matrix for the output problem of the discrete periodic optimal stabilization system are proposed. This formula allows to calculate the feedback matrix with more high exactness. Accuracy of these formulas is tested by the concrete example.